DEMOSTRACIONES

y consideraciones

TEMA 1: Fluidos Ideales

Energía interna específica $\rho\frac{De}{Dt} = -p\nabla\cdot\vec{v} + \dot{Q}$

Entalpía específica $\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \dot{Q}$

PASAR DE A

① $e = h - \frac{p}{\rho}$ $\qquad \frac{\rho D(h - p/\rho)}{Dt} = -p\nabla\cdot\vec{v} + \dot{Q}$

② Separar derivadas →

$$\rho\frac{Dh}{Dt} - \rho\frac{D(p/\rho)}{Dt} - \rho\cdot P\cdot\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{D(\rho)}{Dt} = -p\nabla\cdot\vec{v} + \dot{Q}$$

Regla de la cadena

Variaciones de volumen con la presión

$$\rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{DP}{Dt} - \frac{P}{\rho}\frac{D(\rho)}{Dt} = -p\nabla\cdot\vec{v} + \dot{Q}$$

③ Ecuación de la continuidad $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0$

$$\rightarrow \rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{DP}{Dt} - \frac{P}{\rho}(-\rho\nabla\cdot\vec{v}) = -p\nabla\cdot\vec{v} + \dot{Q}$$

$$\rightarrow \rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = \dot{Q}$$

TEMA 2 flujo potencial

La ecuación de la vorticidad se obtiene haciendo el rotor a la ecuación de la cantidad de movimiento

$$\nabla\times\left[\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla p + \nabla\cdot\bar{\bar{\tau}} + \rho\vec{f_m}\right]$$

Paso 1 dividir por la densidad

$$\nabla\times\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}} + \vec{f_m}\right]$$

Paso 2 TÉRMINO TEMPORAL

$$\nabla\times\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial(\nabla\times\vec{v})}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}$$ ← Propiedad 10

Paso 3 TÉRMINO CONVECTIVO

$$\nabla\times(\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}) = \nabla\times\left[\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\right] = \nabla\times\left[\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times\vec{\omega}\right] = \nabla\times\left[\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + \vec{\omega}\times\vec{v}\right] = \nabla\times\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + \nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{v}) = \vec{\omega}\nabla\cdot\vec{v} - \vec{v}\nabla\cdot\vec{\omega} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{\omega} - \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{v} =$$

Propiedad 1 — Propiedad 10 — cambio de signo del producto — propiedad 3 (= 0) — propiedad 7

$$= (\nabla\times\vec{v})\nabla\cdot\vec{v} - \vec{v}\nabla\cdot\nabla\times\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla(\nabla\times\vec{v}) - (\nabla\times\vec{v})\cdot\nabla\vec{v} = \omega\nabla\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{\omega} - \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{v} =$$

$\nabla\cdot\nabla\times\vec{v} = 0$ Propiedad 4

Paso 4 TÉRMINO DE PRESIÓN

$$\nabla\times\left[-\frac{1}{\rho}\nabla p\right] = -\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p + \left(\frac{-1}{\rho}\right)\nabla\times\nabla p = -\nabla(1/\rho)\times\nabla p$$

propiedad 5; Propiedad 3: $\left(\frac{-1}{\rho}\right)\nabla\times\nabla p = 0$

Paso 5 TÉRMINO DE VISCOSIDAD

$$\nabla\times\left[\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}'\right] = \nabla\times\left(\frac{\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}}{\rho}\right)$$

Paso 6 ECUACIÓN COMPLETA

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\omega}\nabla\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{\omega} - \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p + \nabla\times\left(\frac{\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}}{\rho}\right) + \nabla\times\vec{f_m} \rightarrow \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{\omega} + \vec{\omega}\left(\frac{-1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\right) = \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{v} - \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p + \nabla\times\left(\frac{\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}}{\rho}\right) + \nabla\times\vec{f_m}$$

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho D\vec{\omega} - \vec{\omega}D\rho}{\rho\, Dt} = \frac{\rho D\vec{\omega}}{\rho\, Dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho D\vec{\omega}}{\rho\, Dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho^2 D\vec{\omega}}{\rho^2 Dt} - \frac{\rho\vec{\omega}D\rho}{\rho^2 Dt} = \rho\left[\frac{\rho D\vec{\omega}}{\rho^2 Dt} - \frac{\vec{\omega}D\rho}{\rho^2 Dt}\right] = \rho\frac{D(\vec{\omega}/\rho)}{Dt}$$

desarrollo de regla de la cadena de un cociente

el denominador debe estar al cuadrado ya que se trata de un cociente.

aplicando regla de la cadena inversa

TEMA 3: Potencial complejo

VELOCIDAD POTENCIAL CONJUGADA

$W(z) = \Phi(z) + i\varphi(z)$

$z = x + iy$

$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + i\frac{\partial \varphi}{\partial z} = u + iv \rightarrow$ VELOCIDAD potencial

$\nabla\Phi = ui + vj$

$\nabla\varphi = vi - uj$

{parte imaginaria dte} $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = u + iv$

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$

$\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ {Las funciones holomórficas representan el flujo deseado si su parte imaginaria constante (φ) son líneas de corriente}

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

$\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos 2\theta$

$2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}\, 2\theta$

CARACTERÍSTICAS F.P

$\Delta \times \vec{V} = 0 \rightarrow \exists\, \Phi$

$\Delta \cdot \vec{V} = 0 \rightarrow \exists\, \varphi$

[Bidimensional, Estacionario, $f_m = -\nabla U$] $\rho = cte$, $\mu = 0$, IDEAL

$\frac{D\vec{w}}{Dt} = 0$

$Q_{A\to B} = \int_A^B \partial\varphi = \varphi_B - \varphi_A$

$\Gamma_{A\to B} = \int_A^B \partial\Phi = \Phi_B - \Phi_A$

$\oint_C \vec{v}\cdot\vec{n}\,ds = \int_0^{2\pi} u_r\, r\, d\theta$ (realiza una circunferencia completa)

$\oint_C \vec{v}\,ds = \int_0^{2\pi} u_\theta\, r\, d\theta$

alrededor de una singularidad

TEMA 4: Flujos típicos

FLUJO UNIFORME (cartesianas) (No remanso)

$\vec{v} = U(\cos\alpha\, i + \text{sen}\alpha\, j)$

$W = Uz e^{-i\alpha}$

$\Phi = U(\cos\alpha x + \text{sen}\alpha y)$

$\varphi = U(y\cos\alpha - x\,\text{sen}\,\alpha)$

Pasar de $\Phi \rightarrow \vec{v}$

$\hookrightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \vec{v} = U\cos\alpha\, i + U\,\text{sen}\alpha\, j$

Pasar de $\varphi \rightarrow \vec{v}$

$\hookrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -vi + uj = -U\text{sen}\alpha\, i + U\cos\alpha\, j \rightarrow \vec{v} = ui + vj = U\cos\alpha\, i + U\text{sen}\alpha\, j$

FLUJO EN ESQUINAS (polares)

PASAR A COORDENADAS POLARES

$W(z) = Ae^{-i\alpha}z^n = Ae^{-i\alpha}\cdot r^n e^{i\theta n} = Ar^n e^{i(n\theta - \alpha)} \longrightarrow W(z) = Ar^n(\cos(n\theta - \alpha) + i\,\text{sen}(n\theta-\alpha)) = \Phi + i\varphi$

Cartesianas: $z = x + iy$

polares: $z = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\theta = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta) = re^{i\theta} = r^n \cdot e^{i\theta n}$

OBTENER Φ (parte real)

$\Phi(r,\theta) = Ar^n\cos(n\theta - \alpha)$

OBTENER φ (parte imaginaria)

$\varphi(r,\theta) = Ar^n\,\text{sen}(n\theta - \alpha)$

PASAR A VELOCIDAD ⟶ Se necesita para conocer puntos de remanso y singulares

Componentes de la velocidad $\{u_r, u_\theta\}$

$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = nAr^{n-1}\cos(n\theta - \alpha)$ $\quad u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = n\frac{1}{r}Ar^n\cos(n\theta-\alpha) = nAr^{n-1}\cos(n\theta - \alpha)$

$u_\theta = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -nAr^{n-1}\,\text{sen}(n\theta-\alpha) = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}$

$n = 1 \rightarrow$ uniforme

$n > 1 \rightarrow$ remanso $r = 0$

$n < 1 \rightarrow$ singular $r = 0$

FUENTE O SUMIDERO

< +Q manantial, −Q sumidero (polares) (r=0 singularidad)

$W(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \tan\theta = \frac{y}{x} \longrightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x}$

$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)$

$z - z_0 = Z = R\cdot e^{i\theta}$ (R: módulo, θ: argumento)

$\ln(z-z_0) = \ln(Z) = \ln(Re^{i\theta}) = \ln R + \ln e^{i\theta} = \ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + i\theta =$

$= \ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + i\arctan\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)$

FUNCIÓN POTENCIAL

$\Phi = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ — $\ln(r) \rightarrow$ polares

FUNCIÓN CORRIENTE

$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\arctan\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)$ — $\theta \rightarrow$ polares

VELOCIDAD para $\rightarrow z_0 = 0$

$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{Q}{2\pi} = \frac{Q}{2\pi r}$

$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0$

VÓRTICE

(ambos) (r=0 singularidad)

$W(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z - z_0)$

$z = Re^{i\theta}$ $\quad \theta = \arctan\frac{y-y_0}{x-x_0}$

$z - z_0 = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\cdot e^{i\theta}$

$\ln(z-z_0) = \ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + i\arctan\frac{y-y_0}{x-x_0}$

DIPOLO

(cartesianas/ambos) 1. Multiplicar por el conjugado (r=0 singularidad)

$W(z) = \frac{\mu}{z - z_0} = \frac{\mu_x + i\mu_y}{(x-x_0) + i(y-y_0)}$

$W(z) = \frac{(\mu_x + i\mu_y)\cdot(x-x_0) - i(y-y_0)}{((x-x_0) + i(y-y_0))\cdot((x-x_0) - i(y-y_0))} = \frac{(\mu_x + i\mu_y)((x-x_0) - i(y-y_0))}{(x-x_0)^2 + i(y-y_0)(x-x_0) - i(y-y_0)(x-x_0) - i^2(y-y_0)^2} =$

$= \frac{\mu_x(x-x_0) + (y-y_0)\mu_y + i(-\mu_x(y-y_0) + \mu_y(x-x_0))}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

5. FLUJOS COMPUESTOS → superposición de flujos.

SEMICUERPO DE RANKINE (polares)

Flujo uniforme + manantial / sumidero

$$W(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln(z) \Big/ -\frac{Q}{2\pi}\ln(z)$$

Uz → considerando $\alpha = 0$

$\ln(z)$ → centrados en el origen

MANANTIAL   SUMIDERO



singular → $r = 0$ remanso → $\pm \frac{Q}{2\pi U}$

La línea de corriente que **separa** los dos flujos se obtiene sabiendo que pasa por el punto de remanso $\psi(r,\theta) = \psi(r_R, \theta_R)$

ÓVALO DE RANKINE (cambas)

Flujo uniforme + manantial + sumidero

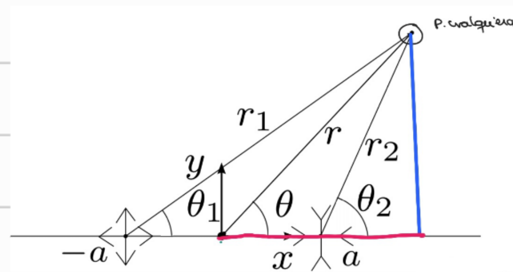
$$W(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln(z+a) - \frac{Q}{2\pi}\ln(z-a)$$

Uz → considerando $\alpha = 0$

$\ln(z+a)$ → centrado en $x = -a$

$\ln(z-a)$ → centrado en $x = a$

Se puede obtener la función corriente operando con relaciones trigonométricas entre los diferentes ángulos



CILINDRO CIRCULAR SIN CIRCULACIÓN

Punto remanso → $\psi_0 = 0$

$\mu = Ua^2 = \mu_x + i\mu_y$

CILINDRO CIRCULAR CON CIRCULACIÓN

6. SIMETRÍAS

TEOREMA DEL CÍRCULO

$$w(z) = W(z) + \bar{W}\left(\frac{a^2}{z}\right)$$

Recomendación → operar por separado

7. PRESIONES y FUERZAS

$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(U^2 - |\vec{v}|^2)$

$c_p = 1 - \frac{|\vec{v}|^2}{|U|^2}$

$L = \rho \Gamma U_\infty$

$D = \int_0^c \tau_p \, dx$

$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c}$

$c = \varepsilon^+ - \varepsilon^-$

8. TRANSFORMACIÓN de JouKowsKi

→ se aplica a una circunferencia

$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$ $\qquad \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = \frac{dW(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta}$

puntos singulares → donde los ángulos NO se conservan

- ↳ $\zeta = \pm 2a \rightarrow z = \pm a \rightarrow \frac{dz}{d\zeta} = \pm\infty$
- ↳ $z = 0 \rightarrow \zeta \rightarrow \pm\infty \rightarrow \frac{d\zeta}{dz} = -\infty$

$z = x \pm iy$

$\zeta = \varepsilon \pm i\eta$

Centro circunferencia plano z $\left\{ x_0 = \frac{x^+ + x^-}{2}, \; y_0 = \frac{y^+ + y^-}{2} \right\}$

Para calcular la sustentación se debe hallar Γ, la cual no varía en el plano transformado (ζ) y se puede calcular en el original (z)

Se puede calcular Γ en función de θ_0 (puntos de remanso)

Los puntos de remanso no se conservan, pues puede ser que $z = a$ sea de remanso pero $\zeta = 2a$ no lo sea.

[no es a^2 ya que "a" en este caso es otra cosa]

FUNCIÓN POTENCIAL EN EL PLANO Z ES SIEMPRE LA MISMA

$$W(z) = U_\infty (z - z_0) e^{-i\alpha} + \frac{U_\infty R^2}{(z - z_0)e^{-i\alpha}} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

flujo uniforme — doblete — circulación

9. CONDICIÓN DE Kutta

Un flujo real no rebordea los puntos (si lo hace el potencial) ya que el borde de salida real no suele ser muy redondeado, por eso Kutta establece que el flujo no puede rebordear un perfil por el borde de salida y por lo las presiones en el extradós e intradós deben ser iguales.

Aplicación de Bernouille VÁLIDA $\left\{ p_{int} = p_{ext} \rightarrow p_0 - \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_{int}|^2 = p_0 - \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_{ext}|^2 \rightarrow |\vec{v}_{int}| = |\vec{v}_{ext}| \right.$

$\frac{dW(z)}{d(z)} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = 0 \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 0$

$\downarrow$ ∞ (bajo $\frac{dW(z)}{d(z)}$)

CONDICIÓN DE KUTTA (señalando "= 0")

FLUJO POTENCIAL : CONCEPTOS DE AYUDA PARA EJERCICIOS

FUNCIÓN POTENCIAL

Existe ⇒ $\nabla \times \vec{v} = 0$ (irrotacional)

$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v$

FUNCIÓN CORRIENTE

Existe ⇒ $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (incompresible)

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$

Las líneas de corriente cumplen que: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$

CALCULAR PUNTOS DE REMANSO

$\vec{v} = 0 \rightarrow u = 0, \; v = 0$ — Se calcula x o y en la expresión más sencilla y se van calculando los correspondientes puntos para cada valor de x o y en la otra expresión

CALCULAR PUNTOS SINGULARES O DE VELOCIDAD INFINITA

Son candidatos a puntos singulares los que anulan a los denominadores de la velocidad ya que hacen que esta tienda a infinito, por lo que ha de comprobarse esto último:

$\lim_{x \to x_{sing},\, y \to y_{sing}} u(x,y) \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \to x_{sing},\, y \to y_{sing}} v(x,y) \rightarrow \infty$

También se pueden calcular igualando a 0 las inversas de las componentes de la velocidad

LÍNEAS DE CORRIENTE EN EL INFINITO

1. Hallar la velocidad en el infinito $\vec{V}_\infty = \vec{V}(x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty)$
2. Calcular ψ para $\vec{V}_\infty$

CALCULAR EL FLUJO VOLUMÉTRICO

LÍNEAS DE CORRIENTE CERCA DE LOS PUNTOS DE REMANSO

1. Establecer nuevos valores de x e y ⇒ $x = x_{Remanso} + \varepsilon, \quad y = y_{Remanso} + \eta$
2. Velocidad cuando ε y η tienden a 0 ⇒ $\vec{v}_R = \lim_{\varepsilon \to 0,\, \eta \to 0} \vec{v}$
3. Sustituir los valores de x_R e y_R por los de remanso
4. Simplificar despreciando los términos **NO** lineales de ε y η
5. Comprobar que la velocidad de remanso tiende a 0 ⇒ $\lim_{\varepsilon \to 0,\, \eta \to 0} \vec{v}_R = 0$
6. Calcular las líneas de corriente sustituyendo x e y por ε y η

CALCULAR LA CIRCULACIÓN

LÍNEAS DE CORRIENTE CERCA DE LOS PUNTOS SINGULARES

Los pasos son los mismos que en el caso anterior exceptuando que los puntos que se sustituyen son los singulares en lugar de los de remanso.

MÉTODOS USADOS

- **DERIVADA MATERIAL**

$$\frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla a$$

a → puede ser escalar o vector

derivada de lo de dentro

$$\frac{D(1/\rho)}{Dt} = \frac{-1}{\rho^2} \frac{D(\rho)}{Dt}$$

- **PROPIEDADES – IDENTIDADES MATEMÁTICAS**

1. $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$
2. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = u^2$
3. $\nabla \times \nabla a = 0$
4. $\nabla \cdot \nabla \times \vec{u} = 0$
5. $\nabla \times (a\vec{u}) = \nabla a \times \vec{u} + a \nabla \times \vec{u}$
6. $\nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{v} \nabla \vec{u} + \vec{u} \times \nabla \times \vec{v} + \vec{v} \times \nabla \times \vec{u}$
7. $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \nabla \cdot \vec{v} - \vec{v} \nabla \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{u} \nabla \vec{v}$
8. $\nabla \times \nabla^2 \vec{u} = \nabla^2 (\nabla \times \vec{u})$
9. $\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$
10. $\nabla \times \vec{v} = \omega$
11. $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$ — Ecuación de la continuidad

VISCOSIDAD CINEMÁTICA CONSTANTE (ρ, μ = cte)

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}' = \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$\bar{\bar{\tau}}'$: tensor de esfuerzos viscosos
μ : cte viscosidad

PROPIEDADES DE LA ARCOTANGENTE

1. $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$
2. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
3. $-\arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \arctan a - \frac{\pi}{2}$
4. $\sigma = \arctan(\tan(\sigma))$

VORTICIDAD

- $\nabla \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$

Consideraciones capa límite

ECUACIONES

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$\rightarrow u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $\quad 0=\frac{\partial p}{\partial y}$

Por Bernoulli: $\left[p+\frac{1}{2}\rho u_e^2=p_s\right]$ $\left[\frac{\partial p}{\partial x}+\rho u_e\frac{du_e}{dx}=0\right]$ $\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=u_e\frac{du_e}{dx}\right]$

ÓRDENES DE VARIABLES

$x\sim L$ $\quad y\sim\delta$ $\quad u_e\sim U$ $\quad \tau_p\sim\mu\frac{U}{\delta}$ $\quad \frac{\delta}{L}=\sqrt{\frac{1}{Re}}$

$c_f=\frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2}\sim\frac{1}{\sqrt{Re}}$

τ_p → esfuerzo en la pared

c_f → coeficiente de esfuerzo

$\tau_p=\mu\frac{du}{dy}$

CONDICIONES INICIALES

$u(y=0)=0$ → Condición de no deslizamiento (Imprescindible en capa límite viscosa)

$u(y=\delta)=u_e$ → Condición de flujo exterior

$\frac{du}{dy}(y=\delta)=0$ → Condición de derivabilidad del perfil de velocidades

$\tau_e=0$ (en el exterior es nulo) $\quad \tau_e=\frac{du}{dy}(y,\delta)$

$\nu\cdot\frac{d^2u}{dy^2}(y=0)=-u_e\frac{du_e}{dx}$ → Ecuación de capa límite en la pared

~~$u\frac{\partial u}{\partial x}$~~ + ~~$v\frac{\partial u}{\partial y}$~~ $=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$\frac{d^2u}{dy^2}(y=\delta)=0$ → Flujo no viscoso fuera de la capa límite

[$\frac{\partial p}{\partial y}=0$ → $\Delta_y p << \Delta_x p$ Las variaciones de presión en y se desprecian] No es una condición

NO PUEDEN SER NEGATIVOS (REPRESENTAN ALTURAS)

ESPESOR $\delta_{99\%}$	ESPESOR DE DESPLAZAMIENTO δ^*	ESPESOR DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO θ
$u(x,\delta_{99})=0'99\,u_e(x)$	$\delta^*=\int_0^\infty\left(1-\frac{u}{u_e}\right)dy$	$\theta=\int_0^\infty\frac{u}{u_e}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)dy$

BLASIUS

← placa plana $u_e=U$

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ $\quad u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}=\nu\frac{d^2u}{dy^2}$

$\eta=y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$ → variable de semejanza

anotaciones

Ser independiente de x → $\frac{\partial\square}{\partial x}=0$

FALKNER SKAN

$\eta=\frac{y}{\varepsilon(x)}$

$f'''+\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{d(u_e\varepsilon)}{dx}ff''+\frac{\varepsilon^2}{\nu}\frac{du_e}{\partial x}(1-f'^2)=0$ $\quad f(0)=f'(0)=0$ $\quad \lim_{\eta\to\infty}f'(\eta)=0$

Para cualquier ejemplo proporcionado en el que se indique una pared o el tipo de flujo se debe calcular, en primer lugar la velocidad del flujo ($u_e(x)$).

1- Potencial Complejo $W(z)$ $\quad$ 2- Función corriente $\varphi(r,\theta)$ / $\psi(x,y)$ $\quad$ 3- Componentes velocidad $\quad$ 4- $u_e(x)=u(x,0)$

Pasos para obtener Falkner Skan

1. Ecuación simplificada de la cantidad de movimiento y continuidad para capa límite
2. Expresar la ecuación en función de la función de corriente ($u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$ $v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$)
3. $\psi=u_e(x)\cdot\varepsilon(x)\cdot f(\eta)$ y $\eta=\frac{y}{\varepsilon(x)}$ → Operar sabiendo que $\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{\eta}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}$; $\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{\varepsilon(x)}$; $\frac{\partial f}{\partial\eta}=f'$

ECUACIÓN INTEGRAL DE VON KARMAN

Se puede usar para resolver tanto flujo laminar como turbulento porque no se ha impuesto una función analítica para el perfil de velocidades.

$$\frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*) \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho u_e^2}$$

Dado un perfil de velocidades con coeficientes desconocidos, estos se calculan a partir de las condiciones de contorno necesarias (= nº incog.) y luego se hallará θ, τ_p, δ^* para sustituir en Von Karman.

↳ $\int_a^\delta d\delta = \int_b^x \cdots\cdots dx$

SEPARACIÓN

El flujo se encuentra a punto de desprenderse → $\tau_p = 0$
- $\tau_p > 0$ {favorable}
- $\tau_p < 0$ {adverso}

el flujo deja de tener tanta fuerza

Gradiente favorable:	Gradiente nulo:	Gradiente adverso débil:	Gradiente adverso crítico:	Gradiente adverso supercrítico:
	PI	PI	PI	PI
$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) < 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) > 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) > 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) > 0$
$\frac{du_e}{dx} > 0$	$\frac{du_e}{dx} = 0$	$\frac{du_e}{dx} < 0$	$\frac{du_e}{dx} < 0$	$\frac{du_e}{dx} < 0$
$\frac{\partial p}{\partial x} < 0$	$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial p}{\partial x} > 0$	$\frac{\partial p}{\partial x} > 0$	$\frac{\partial p}{\partial x} > 0$
$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) > 0$	$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) > 0$	$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) > 0$	$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$	$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) < 0$
$\tau_p > 0$	$\tau_p > 0$	$\tau_p > 0$	$\tau_p = 0$	$\tau_p < 0$
No hay separación.	No hay separación.	No hay separación.	Flujo en proceso de separación.	Hay separación, flujo inverso.
PI dentro.	PI en pared.	PI en flujo.	PI en flujo.	PI en flujo.

Gradiente adverso crítico: pendiente nula $\frac{du}{dy} = 0 = \tau_p$

Gradiente adverso supercrítico: Es lo que se conoce como una burbuja de circulación

La pendiente ya ha cambiado de signo (el flujo va hacia atrás)

flujo inverso ↓ o invertido

Gas ideal

CONSIDERACIONES

1. No hay adición de calor $\dot{Q}=0$
2. No hay conducción de calor $K=0$
3. Isotrópico $\frac{DS}{Dt}=0$ $S=S_0$
4. Casi estacionario y sin trabajo de fuerzas másicas $\frac{\partial}{\partial t}=0$
5. Variables de remanso dependen de S_0, h_0
6. $p_0=p+\frac{1}{2}v^2$ $h+\frac{1}{2}v^2=h_0$

$$\frac{T_0}{T}=\frac{P_0/\rho_0}{P/\rho}=\frac{\left(\frac{\rho_0 \rho^r}{\rho^r}\right)/\rho_0}{P/\rho}=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{r-1}=\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{r-1}{r}}$$

③ $S=S_0$

$$S=C_v \ln\left(\frac{P}{\rho^r}\right)=S_0=C_v \ln\left(\frac{P_0}{\rho_0^r}\right)\rightarrow\frac{P}{\rho^r}=\frac{P_0}{\rho_0^r}\rightarrow\frac{\rho_0}{\rho}=\left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/r}$$

• gas perfecto $p=\rho R_g T \rightarrow T=\frac{P}{\rho R_g}$ ($R_g = C_p - C_v$) ⑥ $h+\frac{1}{2}v^2=h_0$

$$\frac{h_0}{h+\frac{1}{2}v^2}=1 \qquad h=C_pT=\frac{C_p\cdot P}{\rho R_g}=\frac{C_p}{C_p-C_v}\cdot\frac{P}{\rho}=\frac{C_p/C_v}{C_p/C_v-C_v/C_v}\cdot\frac{P}{\rho}=\frac{r}{r-1}\frac{P}{\rho}$$

$$\hookrightarrow \frac{h_0}{h+\frac{1}{2}v^2}=\frac{\frac{r}{r-1}\frac{P_0}{\rho_0}}{\frac{r}{r-1}\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}v^2}=1\rightarrow\frac{r}{r-1}\frac{P_0}{\rho_0}=\frac{r}{r-1}\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}M^2a^2$$

$$\frac{r}{r-1}\cdot\frac{P_0}{\rho_0}\cdot\frac{\rho_0}{P}=\frac{r}{r-1}\frac{P}{\rho}\cdot\frac{\rho_0}{P}+\frac{1}{2}M^2a^2\cdot\frac{\rho_0}{P}=\frac{r}{r-1}\left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/r}+\frac{M^2}{2}\frac{rP}{\rho}\cdot\frac{\rho_0}{P}$$

$$\frac{r}{r-1}\cdot\frac{P_0}{P}=\frac{r}{r-1}\left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/r}+\frac{rM^2}{2}\cdot\left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/r}$$

$$\frac{\frac{P_0}{P}}{\left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/r}}=\frac{\left(\frac{r}{r-1}+\frac{rM^2}{2}\right)}{\frac{r}{r-1}}\rightarrow\boxed{\left(\frac{P_0}{P}\right)^{1-\frac{1}{r}}=1+\frac{(r-1)M^2}{2}}$$

$$\boxed{\frac{T_0}{T}}=\frac{\frac{P_0}{\rho_0}(C_v-C_p)}{\frac{P}{\rho}(C_v-C_p)}=\frac{P_0/\rho_0}{P/\rho}=\frac{P_0}{P}\cdot\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{P_0}{P}\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/r}=\boxed{\left(\frac{P_0}{P}\right)^{1-\frac{1}{r}}}$$

CONDICIONES CRÍTICAS ($M=1$)

CONTINUIDAD $\rightarrow G=\rho v A$

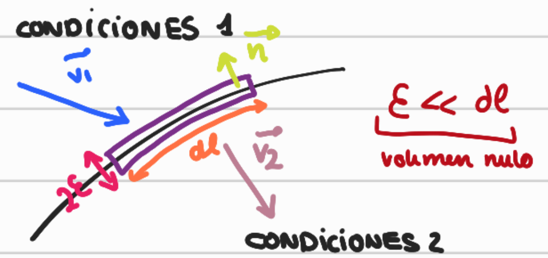
CONDICIONES CRÍTICAS $\rightarrow G=G^*=\rho v A=\rho^* v^* A^* \longrightarrow \frac{A^*}{A}=\frac{\rho v}{\rho^* v^*}=\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{\rho_0}{\rho^*}\cdot\frac{v}{a}\cdot\frac{a}{a_0}\cdot\frac{a_0}{a^*}\cdot\frac{a^*}{v^*}$

$$\frac{a_0}{a^*}=\sqrt{\frac{r+1}{2}} \qquad \frac{\rho_0}{\rho^*}=\left(\frac{r+1}{2}\right)^{\frac{1}{r-1}}$$

$A^* \rightarrow$ ÁREA MÍNIMA $(A\geq A^*)\rightarrow$ Para el flujo pase de subsónico a supersónico debe pasar por una región $A=A^*$

Si la presión exterior es nula → se descarga al vacío
↳ La relación de presiones tiende a infinito y está bloqueada
↳ También ocurrirá si es nula en el interior

onda de choque



OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

onda de choque
(cambio de propiedades)

1. CONSIDERACIONES

A PARTIR DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EXPRESAR LAS VARIABLES DE SALIDA EN FUNCIÓN DE LAS DE ENTRADA

Consideraciones trancisión y turbulencias

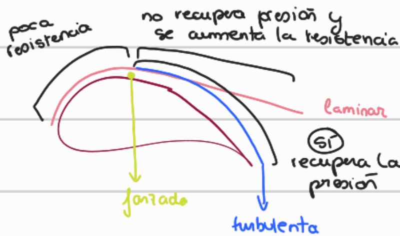
soluciones estacionarias — Después de haber sido perturbada puede tener 3 comportamientos:
- estable (se mantiene en su posición original)
- neutra (No se mantiene en su posición original pero se queda donde se ha perturbado)
- inestable (continúa cambiando después de cesar la perturbación)

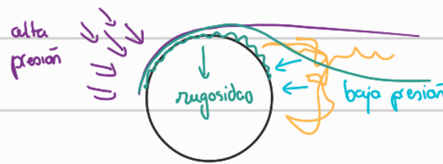
REYNOLDS CRÍTICO → Re a partir del cual el flujo pasa de ser laminar/estable a turbulento/inestable (No es fácil definirlo)

SEPARACIÓN - TRANCISIÓN

La turbulencia es el movimiento caótico de un fluido (ocurren muchos cambios en longitudes muy pequeñas.)

Lo que se busca, para minimizar la resistencia, es en principio que la capa límite sea laminar y adherida, pero si se prevé que va a haber separación (efecto no deseado), lo que se hace es forzar esa transición a turbulenta antes del punto de separación laminar, para que la capa límite se mantenga adherida como capa límite turbulenta, a costa de una mayor fricción, pero evitando la separación.





El flujo turbulento puede estudiarse a través de los valores promediados

$$\bar{v}(\vec{x},t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v(\vec{x},\tau)\, d\tau$$

ESCALA DE KOLMOGOROV

La viscosidad puede despreciarse para $R >> 1$ con respecto a una longitud característica L, pero ese mismo problema puede estudiarse para otra longitud $\delta << L$ para la que la viscosidad sí es importante, a esta escala se le conoce como Kolmogorov.

CASCADA DE TORBELLINOS

Los torbellinos (de longitud L) se pueden subdividir en otros de escala más pequeños de forma reversible hasta llegar a los de longitud $\delta << L$ que se disipan y en este caso el proceso deja de ser reversible. Por lo que se genera una "cascada" ya que al final todos se dirigen en la misma dirección.

Tratamiento numérico de las TURBULENCIAS

DNS

LES

RANS

$$\bar{\varphi}(\vec{x},t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi(\vec{x},t)\,d\tau$$

$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$ → fluctuación

PROPIEDADES

$\overline{\varphi_1'} = 0$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \rightarrow \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2$

$\varphi = \varphi_1\varphi_2 \rightarrow \bar{\varphi} = \overline{\varphi_1\varphi_2} = \overline{(\bar{\varphi}_1 + \varphi_1')(\bar{\varphi}_2 + \varphi_2')} = \bar{\varphi}_1\cdot\bar{\varphi}_2 + \overline{\bar{\varphi}_1\varphi_2'} + \overline{\varphi_1'\bar{\varphi}_2}$ (= 0, = 0)

$\overline{\varphi_1\varphi_2} = \bar{\varphi}_1\cdot\bar{\varphi}_2 + \overline{\varphi_1'\varphi_2'}$

$$\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_i}$$

Resolución por RANS para un flujo bidimensional
$\begin{cases} u = U + u' \\ v = V + v' \\ p = P + p' \end{cases}$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0 \rightarrow \frac{d(U+u')}{dx} + \frac{d(V+v')}{dy}$$

$$\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \rightarrow \frac{\partial(U+u')}{\partial t} + (U+u')\frac{d(U+u')}{dx} + (V+v')\frac{d(U+u')}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(P+p')}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2(U+u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(U+u')}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \rightarrow \frac{\partial(V+v')}{\partial t} + (U+u')\frac{d(V+v')}{dx} + (V+v')\frac{d(V+v')}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(P+p')}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2(V+v')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(V+v')}{\partial y^2}\right)$$

Separando las derivadas:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(U)}{\partial t} + \frac{\partial(u')}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + u'\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{du'}{dx} + u'\frac{du'}{dx} + V\frac{\partial U}{\partial y} + v'\frac{\partial U}{\partial y} + V\frac{du'}{dy} + v'\frac{du'}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial(V)}{\partial t} + \frac{\partial(v')}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + u'\frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{dv'}{dx} + u'\frac{dv'}{dx} + V\frac{\partial V}{\partial y} + v'\frac{\partial V}{\partial y} + V\frac{dv'}{dy} + v'\frac{dv'}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right)$$

Realizando los promedios

$$\frac{\partial\bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{V}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(\bar{U})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u'})}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial\bar{U}}{\partial x} + \bar{u'}\frac{\partial\bar{U}}{\partial x} + \bar{U}\frac{d\bar{u'}}{dx} + \overline{u'\frac{du'}{dx}} + \bar{V}\frac{\partial\bar{U}}{\partial y} + \bar{v'}\frac{\partial\bar{U}}{\partial y} + \bar{V}\frac{d\bar{u'}}{dy} + \overline{v'\frac{du'}{dy}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p'}}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{u'}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{u'}}{\partial y^2}\right)$$

(términos tachados = 0)

$$\frac{\partial(\bar{V})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v'})}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial\bar{V}}{\partial x} + \bar{u'}\frac{\partial\bar{V}}{\partial x} + \bar{U}\frac{d\bar{v'}}{dx} + \overline{u'\frac{dv'}{dx}} + \bar{V}\frac{\partial\bar{V}}{\partial y} + \bar{v'}\frac{\partial\bar{V}}{\partial y} + \bar{V}\frac{d\bar{v'}}{dy} + \overline{v'\frac{dv'}{dy}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p'}}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{v'}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{v'}}{\partial y^2}\right)$$

(términos tachados = 0)

quedando:

$$\frac{\partial\bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{V}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v'u'})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v'v'})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$

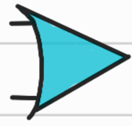
Para escribir las ecuaciones más reducidas

→ Tensor de esfuerzos de Reynolds

$\tau_{Rij} = -\rho \overline{u_i u_j}$

$\overline{\tau'_{ij}} = \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$

→ Tensor de esfuerzos viscosos medio



$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{Rij} + \overline{\tau'_{ij}})}{\partial x_j}$$